

Operadores de composição: Interações entre dinâmica topológica e linear

Artur de Aquino Blois

10/04/2025

1 Introdução

A ideia deste seminário é apresentar uma conexão entre a dinâmica topológica e a dinâmica linear. Para tal iremos apresentar alguns resultados relacionados a funções contínuas e espaços topológicos, ao mesmo tempo que iremos relacionar tais conceitos ao estudo de álgebras de Banach, em particular para C^* -álgebras. Nosso objetivo central é apresentar as interações entre dinâmica topológica e linear utilizando do fato que $C(K)$, onde K é um espaço compacto, possui a estrutura de C^* -álgebra. A principal referência para parte dinâmica será [2], enquanto a principal referência para a parte “algébrica” será [1].

2 Aspectos de dinâmica topológica

A dinâmica topológica tem como pilar o estudo de composição de aplicações contínuas em espaços topológicos, no nosso caso em geral espaços compactos Hausdorff. Em geral, se X é um espaço topológico e $\varphi : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, dizemos que $(X; \varphi)$ é um sistema dinâmico topológico. Iremos definir o espaço das funções contínuas

Definição 1. *Seja K um espaço topológico compacto, então*

$$C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua}\}.$$

Em particular, $C(K)$ é um espaço de Banach complexo munido com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty,$$

e cada função em $C(K)$ é limitada. O espaço das funções contínuas em espaço compacto é o nosso protótipo de álgebra de Banach (mais detalhes a seguir!) e isso nos dá espaço de enunciar um resultado bastante geral da teoria que usaremos ao decorrer dessa apresentação

Teorema 1 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Seja $A \subseteq C(K)$ uma subálgebra invariante por conjugação que contém as constantes e separa pontos de K . Então A é densa em $C(K)$.*

Aqui vamos explicar o significado das nossas hipóteses, a condição de subálgebra significa apenas que A é fechada por multiplicação, isto é, se $f, g \in A \implies fg \in A$. A invariância por conjugação é significa simplesmente que se $f \in A$ então $\bar{f} \in A$. Finalmente, dizer que A separa pontos de K é dizer que se $x \neq y$ em K , então existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Não iremos fornecer aqui uma demonstração, mas há uma demonstração precisa em [1, Theorem 2.40].

Agora, vamos fazer um pequeno detour da teoria apenas para dar um resultado geral da relação entre o espaço topológico e seu espaço de funções contínuas

Lema 1. *Todo espaço métrico compacto é separável.*

Proof. Para $m \in \mathbb{N}$ fixado, bolas da forma $B(x, 1/m)$ para todo $x \in K$ cobrem K , da compacidade de K , existe $F_m \subseteq K$ tal que

$$K \subseteq \cup_{x \in F_m} B(x, 1/m),$$

daí segue que $F = \cup_{m \in \mathbb{N}} F_m$ é contável e denso em K □

e em particular, temos que

Teorema 2. *Seja K um espaço topológico compacto. Então K é metrizável se e somente se $C(K)$ é separável.*

Proof. Suponha que $C(K)$ é separável, então existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência densa em $C(K)$. Definimos então

$$\Phi : K \rightarrow \Omega := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}, \quad \Phi(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}},$$

onde Ω está munido com a topologia produto. Da hipótese de densidade e do Lema de Urysohn, segue que Φ é contínua e injetiva. Daí temos que $K \cong_{\Phi} \Phi(K)$ e então K é metrizável pois Ω o é.

Reciprocamente, seja $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}_+$ a métrica da topologia em K . Do lema, existe $A \subseteq K$ denso e contável, então iremos considerar o conjunto enumerável

$$D = \{f \in C(K) : f = \prod_{\text{finito}} d(\cdot, y), y \in A\} \cup \{1\}.$$

Em particular, $\text{span}(D)$ é uma subálgebra invariante por conjugação de $C(K)$ que contém as constantes e separa pontos de K , então pelo Teorema de Stone-Weierstrass temos que $\text{span}(D)$ é denso em $C(K)$, logo $C(K)$ é separável. $\square$

Voltando para a teoria, podemos recuperar o espaço K a partir de $C(K)$, para tal iremos associar

$$x \in K \leftrightarrow \delta_x \in C(K)',$$

onde δ_x é o funcional de Dirac (ou avaliação) em K , isto é,

$$\delta_x : C(K) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_x(f) = f(x).$$

Algumas das propriedades desse funcional é de $\delta_x \in C(K)'$ e que $\|\delta_x\| = 1$. Como $C(K)$ separa pontos de K temos que a aplicação

$$\delta : K \rightarrow C(K)', \quad x \mapsto \delta_x$$

é injetiva. Para nós, será interessante munir $C(K)'$ com a topologia fraca*, pois daí δ é uma aplicação contínua e como a topologia fraca* é Hausdorff, temos que δ é um homeomorfismo com sua imagem e portanto segue que

$$K \cong_{\delta} \{\delta_x : x \in K\} \subseteq C(K)'.$$

Agora, para distinguir os funcionais de Dirac em $C(K)'$ devemos estudar a estrutura de $C(K)$ como álgebra de Banach.

3 Álgebras de Banach

Aqui veremos a parte mais densa da apresentação de hoje, a menos de alguns resultados, tentaremos fornecer o máximo de demonstrações possíveis e para fins de simplicidade, iremos apenas considerar álgebras de Banach complexas.

Definição 2. Uma $\mathbb{C}$ -álgebra A é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial com uma operação de multiplicação bem-definida, isto é, existe

$$A \times A \rightarrow A, \quad (x, y) \mapsto xy$$

e uma unidade, isto é, existe um elemento “ e ” tal que $ea = ae = a$ para todo $a \in A$.

Dizemos que A é não-degenerada se $A \neq \{0\}$, ou seja, $e \neq 0$ e dizemos que ela é comutativa se $xy = yx$ para todo $x, y \in A$. Em particular, se A é um espaço de Banach com a propriedade de que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in A$$

então A é dita uma álgebra de Banach. Desta definição segue que a multiplicação é contínua e que se $e \neq 0$, então $\|e\| \geq 1$ (em particular podemos tomar $\|e\| = 1$). Dizemos também que $x \in A$ é invertível se existir $y \in A$ tal que $xy = yx = e$ e neste caso denotamos $x^{-1} = y$. A partir daqui, iremos sempre supor que todas as nossas álgebras são comutativas, a menos de menção do contrário.

Definição 3. Sejam A, B álgebras de Banach e seja $T \in B(A, B)$ uma transformação linear. Dizemos que T é multiplicativa se $T(xy) = T(x)T(y)$ para todo $x, y \in A$.

Se $T(e_A) = T(e_B)$ dizemos que T é um morfismo de álgebras. Agora, podemos dar uma noção bastante recorrente de álgebras, em particular de anéis, para nossas álgebras de Banach, os ideais.

Definição 4. Seja A uma álgebra de Banach com unidade e . Definimos um ideal I de A como um subespaço de A tal que se $x \in I$ e $y \in A$, então $xy \in I$.

Por construção, o fecho de um ideal é um ideal já que a multiplicação é contínua. Agora, todas as operações com ideais que conhecemos de anéis comutativos continuam válidas! Com isso, vamos definir o que é uma involução em uma álgebra de Banach que será crucial na definição de C^* -álgebra.

Definição 5. *Seja A uma álgebra de Banach, definimos uma involução $*$ como a aplicação $x \mapsto x^*$ com as seguintes propriedades:*

1. $(x^*)^* = x$;
2. $(x + y)^* = x^* + y^*$;
3. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$;
4. $(xy)^* = y^*x^*$.

Para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Em particular, temos que

$$e^* = e^*e = (e^*e)^* = (e^*e^{**})^* = (e^*e)^* = (e^*)^* = e.$$

Dizemos que $T \in B(A, B)$ um morfismo multiplicativo de álgebras de Banach com involuções é um morfismo* se

$$T(x^*) = (T(x))^*, \quad \forall x \in A$$

Definição 6. *Seja A uma álgebra de Banach com uma involução. Dizemos que A é uma C^* -álgebra se*

$$\|x\|^2 = \|x^*x\|, \quad \forall x \in A$$

Em particular, se A é uma C^* -álgebra então

$$\|x\| \leq \|x^*\| \text{ e } \|x^*\| \leq \|x\| \implies \|x^*\| = \|x\| \quad \forall x \in A,$$

ou seja, a involução é uma isometria. Agora, o nosso interesse é o seguinte: $C(K)$ é uma C^* -álgebra, pois é fácil ver da definição de supremo que

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

e que $\|f\bar{f}\|_\infty = \|f\|_\infty^2$ para todo $f, g \in C(K)$ e com a constante 1 sendo a nossa unidade. Os ideais de $C(K)$ tem uma forma bastante interessante, seja $F \subseteq K$ um fechado e então definimos

$$I_F = \{f \in C(K) : f = 0 \text{ em } F\}$$

em particular I_F é fechado.

Teorema 3. *Se $I \subseteq C(K)$ é um ideal fechado, então existe $F \subseteq K$ fechado tal que $I = I_F$.*

Proof. Defina $F = \{x \in K : f(x) = 0 \forall f \in I\}$ e portanto temos que

$$F = \bigcap_{f \in I} \{x \in K : f(x) = 0\},$$

e segue que F é fechado e temos que $I \subseteq I_F$. Tome $f \in I_F$, $\varepsilon > 0$ e defina $F_\varepsilon = \{x \in K : |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Em particular, é fácil ver que F_ε é um subconjunto fechado de $K \setminus F$ e portanto é compacto.

Para cada $x \in F_\varepsilon$, existe $f_x \in I$ tal que $f_x(x) \neq 0$, então podemos assumir sem perda de generalidade que $f_x \geq 0$ e $f_x(x) > 1$ (se necessário for, multiplique f_x por $\bar{f}_x$ junto de uma constante positiva!). Daí obtemos que uma cobertura $(A_x = \{y \in K : f_x(y) > 1\})_{x \in F_\varepsilon}$ para F_ε e da compacidade de F_ε , existem $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ funções positivas tais que

$$F_\varepsilon \subseteq A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_n}.$$

Então tomaremos $g = f_{x_1} + \dots + f_{x_n} \in I$, logo $g \geq 0$ e temos que

$$\{x \in K : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in K : g(x) \geq 1\}.$$

Assim, defina $g_n := \frac{nf}{1+ng} \in I$ e então segue que

$$|g_n - f| = \frac{|f|}{1+ng} \leq \max \left\{ \varepsilon, \frac{\|f\|_\infty}{1+n} \right\},$$

pois $g \geq 1$ em F_ε e $|f| < \varepsilon$ em $K \setminus F_\varepsilon$. Portanto, para n suficientemente grande $\|g_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $f \in I$ e $I = I_F$. $\square$

Lema 2. Um ideal I de $C(K)$ é maximal se e somente se $I = I_x$ para algum $x \in K$.

Proof. Suponha por absurdo que I_x não é maximal, ou seja, existe ideal J de $C(K)$ tal que $I_x \subsetneq J$, ou ainda, existe $f \in J$ tal que $f(x) \neq 0$. Daí, definimos $g = f(x) - f \in I_x$ com $f \in J$ e portanto $f(x) = g + f \in J$ e portanto $1 \in J$ e então $J = C(K)$.

Reciprocamente, suponha que I é um ideal maximal. É suficiente mostrar que I é fechado. Como $\bar{I}$ é um ideal, temos a seguinte dicotomia: Ou $I = \bar{I}$ ou $\bar{I} = C(K)$. Suponha por absurdo que $\bar{I} = C(K)$, então existe $f \in I$ tal que $\|1 - f\|_\infty < 1$, logo $f = 1 - (1 - f)$ não se anula em K , portanto $1/f \in C(K)$ e então $1 = f \cdot \frac{1}{f} \in I$ e $I = C(K)$, uma contradição! $\square$

Em particular, note que $I_x = \ker(\delta_x)$, onde δ_x é o funcional de Dirac, que é um funcional linear multiplicativo com $\delta_x(1) = 1$, então em particular δ_x é um morfismo de álgebras.

Lema 3. Um funcional linear não-nulo $\psi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ é multiplicativo se e somente se $\psi = \delta_x$ para algum $x \in K$.

Proof. Suponha que $\psi \neq 0$, então existe $h \in C(K)$ tal que $\psi(h) = 1$ e temos que

$$1 = \psi(h) = \psi(1)\psi(h) = \psi(1),$$

logo ψ é um morfismo de álgebras e $I = \ker(\psi)$ é um ideal próprio. Do Teorema do Isomorfismo, segue que I é em particular um ideal maximal, portanto do Lema 2 existe $x \in K$ tal que $I = I_x = \ker(\delta_x)$. Então, para todo $f \in C(K)$ temos

$$f - \psi(f)1 \in \ker(\delta_x),$$

e daí obtemos que $f(x) - \psi(f) = 0$, então $\psi = \delta_x$. $\square$

Daí concluímos que $\mathcal{M}(C(K))$, o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $C(K)$, via a aplicação δ

$$\delta : K \rightarrow \mathcal{M}(C(K)), x \mapsto \delta_x,$$

é um homeomorfo a K se $\mathcal{M}(C(K))$ está munido da topologia fraca*.

4 Operadores de composição

Agora vamos voltar para alguns conceitos de espaços topológicos para motivar nos operadores de composição.

Definição 7. Dados espaços compactos K, L e $\varphi : L \rightarrow K$ uma aplicação, definimos o operador de composição $C_\varphi f = f \circ \varphi$.

Note que podemos relacionar a continuidade da aplicação φ com o nosso operador C_φ

Lema 4. Seja K um espaço compacto, Ω espaço topológico qualquer e $\varphi : \Omega \rightarrow K$ uma aplicação. Então φ é contínua se e somente se $f \circ \varphi$ é contínua para toda $f \in C(K)$. Em particular, $\varphi : L \rightarrow K$ é contínua se e somente se $C_\varphi(C(K)) \subseteq C(L)$.

Proof. Suponha que $f \circ \varphi \in C(\Omega)$ para toda $f \in C(K)$. Daí temos que o conjunto

$$\varphi^{-1}(\{x \in K : |f(x)| > 0\}) = \{y \in \Omega : |(f \circ \varphi)(y)| > 0\}$$

é aberto em Ω para toda $f \in C(K)$. Para mostrar que φ é contínua, é suficiente mostrar que $(A_f = \{x \in K : |f(x)| > 0\})_{f \in C(K)}$ é uma base para a topologia de K .

Seja $U \subseteq K$ aberto e $x \in U$, então do Lema de Urysohn existe $f \in C(K)$ tal que $0 \leq f \leq 1$ com $f(x) = 1$ e $f = 0$ em $K \setminus U$. Portanto $x \in \{z \in K : |f(z)| > 0\} \subseteq U$. $\square$

Teorema 4. Seja $T : C(K) \rightarrow C(L)$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é um morfismo de álgebras;
- (ii) $T = C_\varphi$ para uma única aplicação contínua $\varphi : L \rightarrow K$ e $\|T\| = 1$.

Proof. Para a unicidade, se $C_\varphi = C_\psi$ mas existe $x \in L$ tal que $y_1 = \varphi(x) \neq \psi(x) = y_2$, então existe $f \in C(K)$ tal que

$$f(y_1) \neq f(y_2) \implies (C_\varphi f)(x) \neq (C_\psi f)(x),$$

ou seja, $C_\varphi f \neq C_\psi f$, uma contradição, logo $\varphi = \psi$. Em particular, temos que

$$\|C_\varphi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|f \circ \varphi\|_\infty = 1.$$

Nos resta mostrar que (i) $\implies$ (ii). Tome $y \in L$, então

$$\tilde{T} : \delta_y \circ T : C(K) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto (Tf)(y),$$

é um morfismo de álgebras. Então existe $x \in K$ tal que $\tilde{T} = \delta_x$ e defina $\varphi : L \rightarrow K$ por $\varphi(y) = x$, logo $\tilde{T} = \delta_{\varphi(y)}$. Assim, $(Tf)(y) = f(\varphi(y))$ para todo $y \in L$, ou ainda, $Tf = f \circ \varphi$ para todo $f \in C(K)$. Portanto $f \circ \varphi \in C(L)$ para todo $f \in C(K)$ e assim, φ é contínua pelo Lema 4. $\square$

Observação. Se $K = L$, do Teorema 4 segue que **nenhuma** informação é perdida se estudarmos o comportamento de C_φ ao invés de φ , ou seja, temos uma equivalência

$$\text{Dinâmica topológica em } K \longleftrightarrow \text{Dinâmica linear em } C(K)$$

Lema 5. Seja $\varphi : L \rightarrow K$ uma aplicação contínua e $C_\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$. Então

(i) φ é sobrejetora se e somente se C_φ é injetivo. Em particular, C_φ é uma isometria.

(ii) φ é injetora se e somente se C_φ é sobrejetivo.

Proof. Suponha que φ é sobrejetora. Se $C_\varphi f = f \circ \varphi = 0$ então segue que $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, logo C_φ é injetivo. Reciprocamente, se φ não é sobrejetora, então existe $x \in K \setminus \varphi(L)$. Do Lema de Urysohn, existe $f \in C(K)$ tal que $f(x) = 1$ e $f|_{\varphi(L)} = 0$, logo $C_\varphi f = f \circ \varphi = 0$, portanto C_φ não é injetivo.

Agora, supondo que φ não é injetora, existem $y_1 \neq y_2 \in L$ tal que $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = x$. Então para qualquer $f \in C(L)$ com $f(y_1) \neq f(y_2)$ não pode pertencer a imagem de C_φ . Então C_φ não é sobrejetivo. Reciprocamente, se φ é injetora, segue que $\varphi : L \rightarrow \tilde{L} = \varphi(L) \subseteq K$ é um homeomorfismo. Assim, dado qualquer $f \in C(L)$, definimos $g : f \circ \varphi^{-1} \in C(\tilde{L})$. Do Teorema de Tietze, existe $G \in C(K)$ tal que $G|_{\tilde{L}} = g$. Portanto,

$$C_\varphi G = G \circ \varphi = g \circ \varphi = f.$$

$\square$

Corolário 1. Dois espaços compactos K e L são homeomorfos se e somente se $C(K)$ e $C(L)$ isomorfos como álgebras.

Voltemos a nossa discussão topológica e ver como podemos enxergar resultados no contexto topológico, agora com visão da dinâmica linear

Lema 6. Seja $(K; \varphi)$ um sistema topológico com C_φ operador de composição e $A \subseteq K$ subconjunto fechado. Então A é φ -invariante se e somente se o ideal I_A é C_φ -invariante.

Proof. Suponha que A é φ -invariante e $f \in I_A$. Então temos que

$$(C_\varphi f)(x) = f(\varphi(x)) = 0, \forall x \in A.$$

Então temos que $C_\varphi f \in I_A$. Reciprocamente, se $x \notin A$ então existe $f \in I_A$ tal que $f(x) \neq 0$ pelo Lema de Urysohn. Porém, $C_\varphi f = f \circ \varphi \in I_A$, que implica que $x \notin \varphi(A)$, ou seja, $\varphi(A) \subseteq A$. $\square$

Corolário 2. $(K; \varphi)$ é minimal se e somente se nenhum ideal fechado não trivial é C_φ -invariante.

Agora iremos definir o espaço fixo de C_φ , na prática é apenas os elementos fixados pelo operador, em particular, autovetores com autovalor 1 e o denotamos da seguinte maneira

$$\text{Fix}(C_\varphi) = \{f \in C(K) : C_\varphi f = f\}.$$

E agora podemos apresentar o seguinte resultado

Lema 7. Se $(K; \varphi)$ é topologicamente transitivo então $\text{Fix}(C_\varphi)$ tem dimensão 1.

Proof. Se $x \in K$ e $f \in \text{Fix}(C_\varphi)$, então

$$f(\varphi^n(x)) = (C_\varphi^n f)(x) = f(x) \forall n \geq 0.$$

Assim f é constante em $\overline{\text{Orb}_+(x)}$ para todo $x \in K$. Da hipótese, se alguma $\text{Orb}_+(x)$ é densa em K , então toda função $f \in \text{Fix}(C_\varphi)$ é constante, ou seja, $\text{Fix}(C_\varphi)$ tem dimensão 1. $\square$

Contudo, a recíproca do resultado acima é falsa. Considere $K = [0, 1]$, $\varphi(x) = x^2$ para todo $x \in K$. É fácil ver que

$$\varphi^n \rightarrow \chi_{\{1\}}.$$

Assim $(K; \varphi)$ não é topologicamente transitivo. Porém, se $f \in \text{Fix}(C_\varphi)$ temos que $f(x^2) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Em particular, $f(x^{2^n}) = f(x)$ para $n \geq 1$ se e somente se f é constante, ou seja, a recíproca é falsa!

Para um possível próximo seminário, podemos discutir como essas noções se juntam a teoria de Gelfand, um dos resultados mais profundos da teoria de álgebras de Banach, em particular de C^* -álgebras.

References

- [1] Douglas, R. G., *Banach algebra techniques in operator theory* (Vol. 179). Springer Science & Business Media, (1998).
- [2] Eisner, T., Farkas, B., Haase, M., & Nagel, R., *Operator theoretic aspects of ergodic theory* (Vol. 272). Springer, (2015).