Uma introdução a operadores de composição no espaço de Hardy do disco

Artur de Aquino Blois

14/11/2024

Considere Hol($\mathbb{D}$) a $\mathbb{C}$-álgebra de funções holomorfas sobre disco. Com a topologia natural do espaço, temos que Hol($\mathbb{D}$) é um espaço vetorial topológico com estrutura de álgebra, se considerarmos qualquer morfismo álgebras $\varphi : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, ele será contínuo se e somente se φ for um operador de composição (note que essa construção pode ser considerada num caso mais geral, veja [5] por exemplo).

Em nossa apresentação iremos discutir alguns fatos gerais a respeito operadores de composição e iremos particularizar para espaços de nosso interesse. Então, vamos começar a dar as definições iniciais:

Definition 1. *Dado um espaço topológico X e $\varphi : X \to X$ uma aplicação contínua, definimos o operador de composição C_φ dado por $(C_\varphi f)(x) = f(\varphi(x))$.*

Em geral da definição acima, a priori só precisamos que o operador de composição seja definido em um espaço vetorial de funções f em X, mas afim de ter resultados mais concretos, daqui em diante iremos supor que C_φ é um operador em um espaço de Hilbert de funções analíticas. Um dos espaços mais clássicos e com maior número de resultados é o espaço de Hardy-Hilbert do disco que iremos apresentar em seguida

Definition 2. *Definimos o espaço de Hardy-Hilbert do disco como espaço de funções holomorfas no disco com coeficientes quadrado-somáveis, isto é,*

$$H^2 = H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

A estrutura de espaço de Hilbert desse espaço vem através da seguinte definição de produto interno, se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, então

$$\langle f(z), g(z) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} \tag{1}$$

e de fato, temos que esse espaço é também separável pois existe um isomorfismo isométrico entre H^2 e $\ell^2(\mathbb{N})$. Ademais, outra propriedade interessante sobre esse espaço é o fato de que este é um espaço de núcleo de reprodução, isto é, existem funções k_α tais que

$$\langle f(z), k_\alpha(z) \rangle = f(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{D}.$$

e de fato temos uma expressão fechada para essas funções que é dada por

$$k_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{\alpha} z},$$

e é fácil ver que tais funções pertencem ao espaço de Hardy. A topologia definida nesse espaço é a mesma da restrição do espaço de funções holomorfas, convergência uniforme em subconjuntos compactos. Agora, podemos dar mais estrutura para este espaço, isto é, podemos via isomorfismo enxergar esse espaço como um subespaço do espaço $L^2(\mathbb{T})$, para tal temos alguns resultados:

Theorem 1. *[9, Theorem 1.1.12] Seja f função analítica no disco. Então $f \in H^2$ se e somente se*

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Em particular, se $f \in H^2$,

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Ou seja, temos uma definição equivalente para o espaço H^2 e note que podemos fazer a seguinte definição análoga, considere $\tilde{H}^2$ como o subespaço de $L^2(\mathbb{T})$ tal que os coeficientes de Fourier indexados pelos inteiros negativos são nulos, que representamos da seguinte maneira:

$$\tilde{H}^2 = \{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, e_n \rangle = 0 \quad \forall n < 0\}.$$

Com uma série de resultados não triviais, obtemos um isomorfismo entre $\tilde{H}^2$ e H^2 a partir da seguinte identificação:

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) \quad \text{para quase todo } \theta.$$

Agora, voltemos aos operadores de composição! A priori, é fácil ver que os operadores de composição são lineares, porém não é direto que a função definida por $f \circ \varphi$, com $f \in H^2$ e $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função analítica, está também em H^2, ou seja, precisamos verificar que C_φ está bem-definido que podemos verificar da seguinte maneira:

Theorem 2. *[9, Theorem 5.1.5] Seja $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função analítica. Então o operador C_φ está bem definido e é limitado em H^2. Em particular,*

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}}.$$

Note que o resultado acima não é nada trivial, pois não é imediato que a composição de duas séries de potência convergem, e também que a composição dos coeficientes continuam sendo uma sequência em ℓ^2. Uma pergunta natural na teoria de operadores é, dado um operador de multiplicação M_ψ, definido por $(M_\psi f)(z) = \psi(z)f(z)$, para quais operadores $A \in B(H^2)$ temos que $AM_\psi = M_\psi A$? Se tivermos um símbolo tal que $\psi \circ \varphi = \psi$, então temos que $C_\varphi M_\psi = M_\psi C_\varphi$. Note que φ pode não ser tão trivial, porém se ψ for "razoável", φ é pelo menos uma função em H^2.

Voltando ao teorema anterior, não é difícil ver que para qualquer $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, temos que $C_\varphi 1 = 1$ e portanto $\|C_\varphi\| \geq 1$. Então combinando os resultados, obtemos que:

Corollary 1. *[9, Corollary 5.1.6] Se C_φ é um operador de composição tal que $\varphi(0) = 0$, temos que $\|C_\varphi\| = 1$.*

Em particular, recíproca da afirmação acima também é verdadeira! Agora, da construção dada acima, podemos começar a caracterizar melhor nossos operadores, primeiramente com um lema bastante simples:

Lemma 1. *[9, Lemma 5.1.9] Se C_φ é um operador de composição e k_α é um núcleo de reprodução, então $C_\varphi^* k_\alpha = k_{\varphi(\alpha)}$.*

Que nos possibilita enunciar a seguinte caracterização:

Theorem 3. *[9, Theorem 5.1.12] Um operador $T \in B(H^2)$ é um operador de composição se e somente se T^* mapeia núcleos de reprodução em núcleos de reprodução.*

Para propriedades mais gerais desses operadores, podemos dar condições suficientes para quando tais operadores são normais e quando são compactos.

Theorem 4. *[9, Theorem 5.1.15] O operador de composição C_φ é normal se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = \lambda z$ com $|\lambda| \leq 1$.*

Logo, temos uma caracterização bastante interessante para normalidade de operadores de composição, e agora para compacidade temos que:

Theorem 5. *[9, Theorem 5.1.16] Se existe um número positivo $s < 1$ tal que $|\varphi(z)| < s$ para todo $z \in \mathbb{D}$, então C_φ é compacto.*

E dado que o operador de composição é compacto e da estrutura de H^2 como subespaço de $L^2(\mathbb{T})$, temos o seguinte resultado com respeito ao símbolo associado ao operador:

Theorem 6. *[9, Theorem 5.1.17] Se C_φ é compacto, então $|\tilde{\varphi}(e^{i\theta})| < 1$ quase todo ponto em $\mathbb{T}$.*

Os resultados acima descrevem bem condições suficientes para a compacidade de um operador de composição, e temos também condições necessárias para tal. Vamos enunciá-las fazendo um pequeno desvio e definir a função de contagem de Nevanlinna:

Definition 3. *Seja $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função analítica, definimos a função de contagem de Nevanlinna N_φ por:*

$$N_\varphi(w) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{z \in \varphi^{-1}(w)} \log\left(\frac{1}{|z|}\right), & w \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição, $\varphi^{-1}(w)$ denota a sequência de zeros da função $\varphi - w$, e à respeito da convergência da função, contanto que $w \neq \varphi(0)$ temos por um resultado auxiliar [12, Página 120] que :

$$\sum_{z \in \varphi^{-1}(w)} 1 - |z| < \infty \tag{2}$$

e se $z \in \mathbb{D}$ é limitado longe da origem, isto é, existe $c > 0$ tal que $0 < c < |z|$, temos que $1 - |z| \approx \log \frac{1}{|z|}$, então temos nossa convergência.

De certa forma, a função de Nevanlinna calcula a "afinidade" do símbolo φ com o valor w. Para princípios de cálculo, a função de contagem tem um peso dado pela multiplicidade em cada pré-imagem que é essencialmente a distância do ponto para S^1, então elementos que estão "mais para dentro" do disco tem um peso maior! Nos extremos, temos que $N_\varphi(w) = 0$ se φ não assume o valor w e $N_\varphi(w) = \infty$ se $w = \varphi(0)$. Agora, em um grau maior de generalidade temos que

Theorem 7. *[12, Página 180] Suponha que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é uma função holomorfa. Então C_φ é compacto em H^2 se e somente se*

$$\lim_{|w| \to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0 \tag{3}$$

Podemos ainda discutir propriedades dos espectros de operadores de composição, mas dado como o leitor interessado vai perceber, muito dessa teoria depende do tipo de símbolo do operador, então para uma exposição mais geral, sugerimos [9, Seções 5.3, 5.4]. Agora que temos características bastante clássicas de operadores pelo ponto de vista de análise funcional e teoria de operadores, vamos enunciar as propriedades mais usuais dentro da dinâmica linear, como por exemplo, ciclicidade e hiperciclicidade. Por completude, vamos definir aqui tais conceitos:

Definition 4. *Seja E um espaço de Banach e $T \in B(E)$, dizemos que:*

a) T é cíclico se existe $x \in E$ tal que $\overline{span}\{x, Tx, T^2x, \dots\} = E$. Em particular, dizemos que tal $x \in E$ é um vetor cíclico de T.

b) T é hipercíclico, se existe $x \in E$ tal que $Orb(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ é denso em E. Em particular, dizemos que tal $x \in E$ é um vetor hipercíclico.

Existe uma representação dos vetores hipercíclicos de um operador T em um espaço de Hilbert separável (note que não há vetores hipercíclicos em espaços não separáveis!) que pode ser útil para fins de operações em conjuntos dada da seguinte maneira:

$$HC(T) = \bigcap_{s \in S} \bigcap_{k} \bigcup_{n} \{x \in \mathcal{H} : \|T^n x - s\| < 1/k\},$$

onde S é qualquer subconjunto enumerável denso de $\mathcal{H}$. Em particular, se T é hipercíclico, então $HC(T)$ é um conjunto G_δ denso. Nota que essa definição e caracterização não nos revela muito como verificar se um operador é hipercíclico, de onde podemos enunciar o critério de hiperciclicidade:

Theorem 8. *[12, Página 109] Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert separável e $T \in B(\mathcal{H})$. Suponha que existe subconjunto X de $\mathcal{H}$ denso tal que $T^n \to 0$, e outro subconjunto denso Y com um mapa $S : Y \to Y$ tal que*

a) $TS = id_Y$,

b) $S^n \to 0$ em Y.

Então T é hipercíclico.

Uma maneira de construir um operador hipercíclico em H^2, é olhar para operadores de composição com certas propriedades no símbolo, por exemplo:

Theorem 9. *[12, Página 110] Suponha que φ é um automorfismo conforme do disco sem pontos fixos. Então C_φ é um operador hipercíclico.*

Em particular, se tivermos $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa tal que $\varphi(z_0) = z_0$, podemos mostrar que C_φ não é hipercíclico, de fato se z_0 é tal ponto fixo, suponha que existe $f \in H^2$ hipercíclico. Seja $g \in \overline{\mathrm{Orb}(C_\varphi, f)}$, então existe alguma subsequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f \circ \varphi^{n_k} \to g$ se $k \to \infty$, em H^2 e em particular, pontualmente. Como $\varphi(z_0) = z_0$ segue que

$$g(z_0) = \lim_k f(\varphi^{n_k}(z_0)) = f(z_0).$$

Então, segue-se que o fecho da órbita de f exclui todas as funções de diferem de f em z_0, logo tal órbita não pode ser densa. Dessa observação, podemos concluir que nenhum operador de composição compacto pode ser hipercíclico em um espaço de Hilbert separável (embora seja verdade um fato ainda mais geral que é, nenhum operador compacto em um espaço de Banach é hipercíclico). Para uma discussão mais aprofundada de hiperciclicidade, sugerimos [12, Capítulo 8].

Agora, vamos para uma zona de interesse do nosso grupo de pesquisa com relação aos operadores de composição em H^2, uma abordagem para o Problema do Subespaço Invariante que pode ser enunciado da seguinte maneira: Dado um espaço de Banach E de dimensão ≥ 2 e um operador $T \in B(E) \setminus \{0\}$, então T admite um subespaço invariante fechado não-trivial? Bem essa é uma pergunta que ainda está em aberto (mais ou menos aberta durante os anos 50) que é parcialmente respondida, nos dias de hoje com solução pendente apenas para o caso onde E é um espaço de Banach reflexivo ou um espaço de Hilbert separável. Uma possível abordagem para o problema é a utilização de operadores universais que iremos introduzir a seguir:

Definition 5. *[11] Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e U operador linear limitado. Então U é dito universal para $\mathcal{B}$, se dado qualquer operador linear limitado T em $\mathcal{B}$, $\exists\, \alpha \neq 0$ e um subsespaço invariante M de U tal que $U|_M$ é similar a αT.*

Similar aqui significa apenas que existe um operador linear $S : M \to \mathcal{B}$ tal que $SU|_M S^{-1} = \alpha T|_M$. A vantagem de se trabalhar com espaços de Hilbert separáveis é que temos condições suficientes bastante simples na forma de:

Theorem 10. *[1] Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert separável e U operador linear limitado em $\mathcal{H}$. Se*

1. *dim $\ker(U) = \infty$,*
2. *U é sobrejetivo.*

Então U é universal para $\mathcal{H}$.

Proof. Seja $K = \ker(U)$, defina $\tilde{U} := U|_{K^\perp} : K^\perp \to \mathcal{H}$. Note que $\tilde{U}$ é bijetivo pois seu domínio é $K^\perp$ e, por hipótese, U é sobrejetivo. De fato, podemos escrever $\mathcal{H} = K \oplus K^\perp$, definindo também $V = \tilde{U}^{-1} : \mathcal{H} \to K^\perp$ e tomamos $W : \mathcal{H} \to K$ um isomorfismo isométrico pelo Teorema de Riesz-Fischer, já que $U \in B(\mathcal{H})$ e K é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, portanto um espaço de Hilbert e em particular, K tem dimensão infinita por hipótese. Assim, com essas notações, temos que:

1. $U \circ V = Id_{\mathcal{H}}$.
2. $U \circ W = 0$.
3. $\ker(W) = \{0\}$.
4. $\mathrm{Ran}(V) = K^\perp$.

Agora, vamos a mostrar a definição de universalidade. Seja $T \in B(\mathcal{H})$ e seja $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $|\alpha|\|T\|\|V\| < 1$. Tome $n = |\alpha|\|T\|\|V\|$. Defina $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k V^k W T^k$ e note que essa é uma série absolutamente convergente pois:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha^k V^k W T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k \|V\|^k \|W\| \|T\|^k \leq \|W\| \sum_{k=0}^{\infty} n^k < \infty$$

Sabemos que $B(\mathcal{H})$ é um espaço de Banach. Logo, convergência absoluta implica convergência. Então segue que existe $J \in B(\mathcal{H})$ tal que $J = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k V^k W T^k$. Onde vemos que :

$$W + \alpha V J T = J \tag{4}$$

$$UJ = U(W + \alpha V J T) = 0 + \alpha Id_{\mathcal{H}} J T = \alpha J T \tag{5}$$

Em (4), podemos ver que:

$$W + \alpha V J T = W + \alpha V \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k V^k W T^k \right) T = W + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} V^{k+1} W T^{k+1} = J$$

Precisamos mostrar que $\mathrm{Ran}(J)$ é fechado e invariante por U e tal que $J : \mathcal{H} \to \mathrm{Ran}(J)$ é um isomorfismo, então (4) mostrará a universalidade de U.

- $\mathrm{Ran}(J)$ é fechado:

Seja $\tilde{x} \in \overline{\mathrm{Ran}(J)}$, tome $(x_n) \subset \mathcal{H}$ tal que $J(x_n) \to \tilde{x}$. Seja $P : \mathcal{H} \to K$ a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre K. Aplicando P na equação (4), obtemos que:

$$PJ(x_n) = P(W(x_n) + \alpha VJT(x_n)) = W(x_n)$$

Pois $W(x_n) \in K$ e $\mathrm{Ran}(V) = K^{\perp}$, portanto segue que $W(x_n) \to P(\tilde{x})$. Como W é um isomorfismo isométrico, temos que $x_n \to x$ para algum $x \in \mathcal{H}$ e isso implica que $J(x_n) \to J(x)$, logo $\tilde{x} = J(x)$.

- $\mathrm{Ran}(J)$ é invariante por U.

Pela equação (5), sabemos que:

$$UJ(x) = \alpha JT(x) = J(\alpha T(x))$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto $\mathrm{Ran}(J)$ é invariante por U.

- $J : \mathcal{H} \to \mathrm{Ran}(J)$ é um isomorfismo.

É fácil ver que J é sobrejetivo e contínuo. Agora, se $J(x) = 0$ então $W(x) + \alpha VJT(x) = 0$ que implica que $W(x) = 0$. Como W é um isomorfismo isométrico, segue que $x = 0$. Pelo Teorema da aplicação inversa, temos que J é um isomorfismo.

$\square$

O Teorema acima é conhecido como Critério de Caradus e existem alguns aprimoramentos que podem ser encontrados em [6, 10], notando que apenas a hipótese sobre o núcleo é necessária. Podemos apresentar um exemplo bastante simples de operador universal, considere $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$ e fixando $a > 0$ definimos o shift de multiplicidade infinita dado por:

$$(S_a^* f)(t) = f(t + a) \text{ para } t > 0 \text{ e } f \in L^2(0, \infty). \tag{6}$$

A grande conexão entre o ISP e os operadores universais é a seguinte proposição:

Proposition 1. *[4, Proposition 8.1.2] Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo separável e de dimensão infinita e seja $U \in B(\mathcal{H})$ um operador universal, então são equivalentes:*

1. *Todo $T \in B(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ admite subespaços invariantes não-triviais,*
2. *Todo subespaço invariante não-trivial de U são de dimensão 1.*

Um dos resultados mais recentes se deve a Carmo-Noor [3] que diz que se considerarmos o símbolo $\varphi(z) = az + (1 - a)$ para $0 < a < 1$, então $C_\varphi - \lambda$, para um λ apropriado, é universal! Como a translação não altera os subespaços invariantes, basta estudar os subespaços invariantes de C_φ no sentido da Proposição 1. Para uma leitura a mais no seguinte tema sugerimos as referências [2, 4, 8]. Para estudos sobre o H^2 e operadores de composição sugerimos [7, 9, 12]. Obrigado pela atenção!

References

[1] Selwyn R Caradus. Universal operators and invariant subspaces. In *Proc. Amer. Math. Soc*, volume 23, pages 526–527, 1969.

[2] João R Carmo, Ben Hur Eidt, and S Waleed Noor. Minimal invariant subspaces for an affine composition operator. *Complex Analysis and Operator Theory*, 18(3):59, 2024.

[3] Joao R Carmo and S Waleed Noor. Universal composition operators. *Journal of Operator Theory*, 87(1):137–156, 2022.

[4] Isabelle Chalendar and Jonathan R Partington. *Modern approaches to the invariant-subspace problem*, volume 188. Cambridge University Press, 2011.

[5] Lourenço M. Lilian Condori, Luciano O. Homomorphisms between algebras of holomorphic functions in infinite dimensional spaces. *Mathematica Bohemica*, 132(3):237–241, 2007.

[6] Carl C Cowen and Eva A Gallardo-Gutiérrez. An introduction to rota's universal operators: properties, old and new examples and future issues. *Concrete Operators*, 3(1):43–51, 2016.

[7] Carl C Cowen and Barbara D MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*, volume 20. CRC press Boca Raton, 1995.

[8] Ben Hur Eidt. *Invariant subspaces of an affine symbol composition operator: Subespaços invariantes de um operador de composição com símbolo afim.* PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, 2024. Disponível em https://hdl.handle.net/20.500.12733/18692.

[9] Rubén A Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, volume 237. Springer Science & Business Media, 2007.

[10] Elodie Pozzi. Universality of weighted composition operators on l 2 ([0, 1]) and sobolev spaces. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 78(3):609–642, 2012.

[11] Gian-Carlo Rota. On models for linear operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(3):469–472, 1960.

[12] Joel H Shapiro. *Composition operators: and classical function theory.* Springer Science & Business Media, 2012.